„5 vor 12“ - Die RWTH Wissenschaftsnacht

Eine Veranstaltung der RWTH

Das Bild-Nagel-Problem

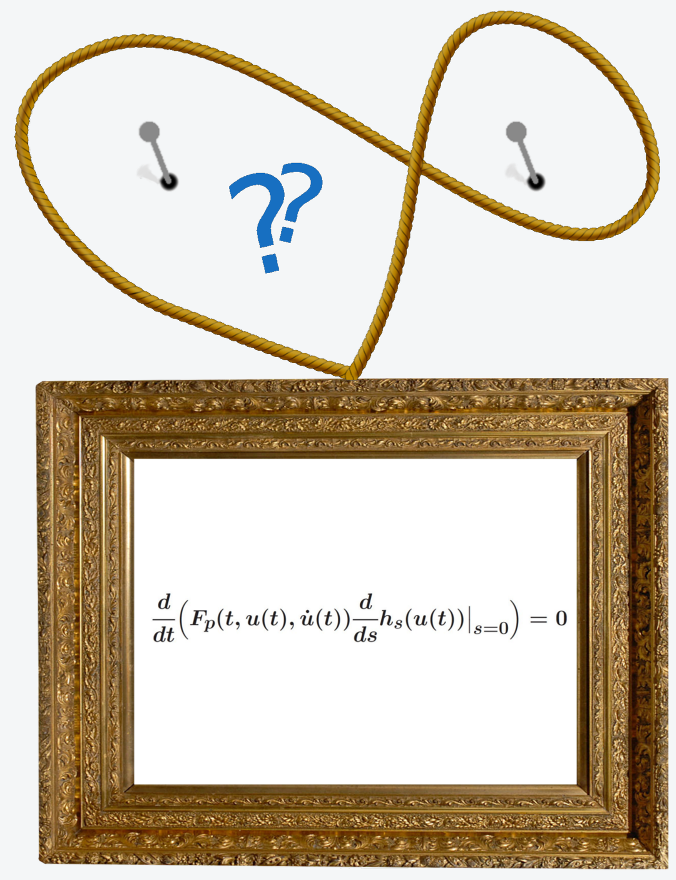
Sven Pistre, Elisabeth Wacker

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Problemstellung

In Emmy Noethers Büro in Princeton hing ein Bild an der Wand. Das Besondere an diesem Bild war allerdings nicht die Darstellung des nach ihr benannten Theorems über Erhaltungssätze, sondern die Art und Weise wie der Rahmen an der Wand befestigt war. Emmy Noether hatte zwei Nägel in die Wand geschlagen und das Bild an einer Kordel daran aufgehängt. Immer wenn Studierende in ihre Sprechstunde kamen erzählte sie ihnen, sie habe die Kordel so um die beiden Nägel gewickelt, dass das Bild herunterfalle, sobald ***einer*** der beiden Nägel (***egal welcher***) aus der Wand gezogen würde. Die Studierenden waren verblüfft und überlegten:

- Wie genau hat Emmy Noether die Kordel um die zwei Nägel gewickelt?
- Hätte sie dies auch mit drei Nägeln schaffen können?
- Wäre auch eine Konstellation mit 100000 Nägeln möglich?

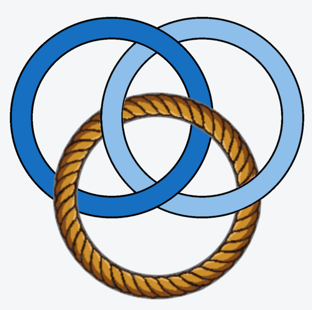


Nebenstehende Anekdote ist natürlich fiktiv, tatsächlich war Emmy Noether (* 23. März 1882 † 14. April 1935) aber die herausragendste Mathematikerin ihrer Zeit und lieferte weitreichende Beiträge zur mathematischen Physik, Variationsrechnung und Algebra.

Verbindung zur Knotentheorie

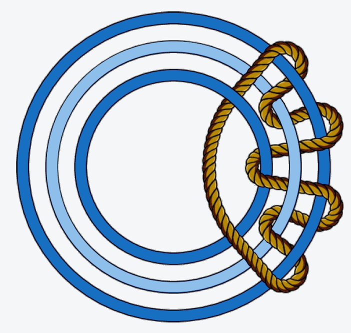
Borromäische Ringe

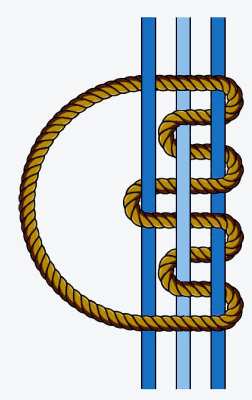
Die Borromäischen Ringe sind drei Ringe, die so angeordnet sind, dass bei Entfernen eines beliebigen Ringes die beiden anderen Ringe getrennt werden. Eine solche Anordnung erzeugt eine Lösung des 2-Nagel-Problems (und umgekehrt): Einen Ring kann man durch “Aufbiegen” und unendliches Verlängern als Gerade ansehen. Mathematisch entspricht dies der stereographischen Projektion von $\mathbb{S}^1$ auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Identifiziert man zwei der Ringe jeweils mit einer solchen Geraden (“Nagel”), dann entspricht der dritte Ring genau der Kordel.



Brunnsche Verlinkung

Eine Lösung des verallgemeinerten Bild-Nagel-Problems mit n Nägeln kann durch eine ähnliche Konstruktion angegeben werden. Gesucht ist eine Brunnsche Verlinkung: Eine Anordnung von $n+1$ Ringen, sodass bei Entfernen eines einzelnen beliebigen Rings die restlichen n Ringe nicht mehr miteinander verlinkt sind. Durch “Aufbiegen” von n Ringen, kann man eine solche Brunnsche Verlinkung als Lösung des n-Nagel-Problems ansehen.





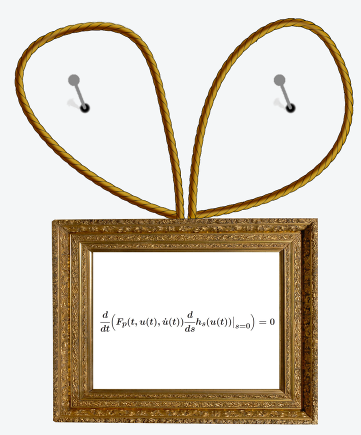
Verbindung zur algebraischen Topologie

Zur Konstruktion einer expliziten Lösung ist folgende Abstraktion hilfreich: Fixiert man einen Punkt (Bilderrahmen) in der Ebene (Wand), so kann man alle möglichen geschlossenen Schleifen (Kordel) betrachten, die von diesem Punkt ausgehen. Mathematisch bilden alle solchen Schleifen die Fundamentalgruppe der Ebene. Stecken keine Nägel in der Wand, so gibt es keine (nicht-konstante) elementare Schleife. Steckt ein Nagel in der Wand, so gibt es (bis auf Orientierung) eine elementare Schleife; bei zwei Nägeln zwei elementare Schleifen, usw. Jede Lösung lässt sich aus diesen elementaren Schleifen zusammensetzen. Mathematisch berechnet man die Fundamentalgruppe der Ebene aus der man n Punkte (Nägel) entfernt hat. Dies ist die freie Gruppe auf n Erzeugern. Für jeden der n Nägel führt man ein Symbol a_i ein:

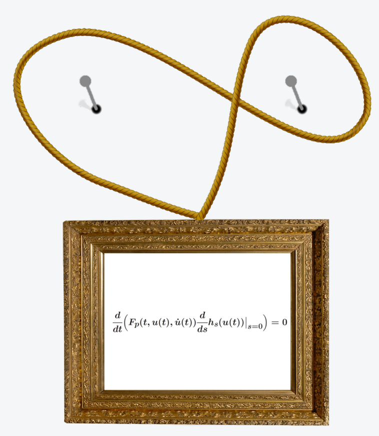
- a_i^+: “Führe die Kordel **im** Uhrzeigersinn über Nagel i.”
- a_i^-: “Führe die Kordel **gegen** den Uhrzeigersinn über Nagel i.”

Gesucht ist nun ein “Wort” aus den Buchstaben $a_1^\pm, a_2^\pm \ldots, a_n^\pm$, sodass sich bei Entfernen aller Vorkommen eines beliebigen Buchstabens a_i alle restlichen Buchstaben “wegkürzen”. Hierbei gilt stets $a_j^+ a_j^- = 1$ (das “leere” Wort) und $a_j^n a_j^m = a_j^{n+m}$, aber $a_j^\pm a_k^\pm \neq a_k^\pm a_j^\pm$ für $k \neq j$. Zum Beispiel gilt $a_1^+ a_2^- a_3^+ a_3^- a_2^+ = a_1^+$.

Kannst du ein solches Wort erzeugen, dass aus zwei Buchstaben $a_1^\pm, a_2^\pm$ besteht? Falls ja, kannst du dieses Wort nutzen um ein Wort aus drei Buchstaben $a_1^\pm, a_2^\pm, a_3^\pm$ zu erzeugen? Ist diese Methode zur Lösung des n-Nagel-Problems effizient?



Zwei elementare Schleifen



Diese Schleife entspricht $a_1^+ a_2^-$

Mehr Infos?

Fachgruppe Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Research Area Operations Research and Management
RWTH AACHEN UNIVERSITY